

## 1. Основные законы, определения, обозначения и область применения

Изучение электрических цепей, которое осуществляется в рамках данной учебной дисциплины "**ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОНИКИ**":

- **ориентировано** на подготовку *бакалавров, инженеров, и магистров* по направлениям подготовки специалистов в области *техники и технологий*,
- **ограничивается** областью "*низких и средних*" значений *токов, напряжений и частот*,
- **направлено** на теоретическое и практическое освоение фундаментальных основ и физики электрических процессов, протекающих в *линейных цепях постоянного и переменного тока*,
- **использует** развитый аппарат моделирования и реального эксперимента по сети Интернет,
- **отличаются** в методическом плане от подходов, принятых при изучении электрических цепей в других учебных дисциплинах:
  - "ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ", где основной акцент делается на изучение *методов расчета* сложных линейных и нелинейных электрических цепей;
  - "ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ", где основной акцент делается на изучение *магнитных и электромагнитных цепей средней и большой мощности*;
  - "ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ", где основной акцент делается на изучение *индуктивно-связанных контуров, высокочастотных радиотехнических колебательных контуров и волноводов*.

### 1.1. Электрическая цепь

**Электрическая цепь** - это электрическое соединение *резисторов ( $R$ )*, *конденсаторов ( $C$ )*, *катушек индуктивностей ( $L$ )* друг с другом и с одним или несколькими *источниками тока ( $I$ )* и/или *источниками ЭДС ( $E$ )*, в результате чего в электрической цепи протекает **электрический ток  $i(t)$** , а на элементах создается **падение электрического напряжения  $u(t)$** .

### 1.2. Типы электрических цепей:

- **Линейные**, когда параметры всех входящих элементов *не зависят* от приложенного к ним напряжения и протекающего по ним тока или, другими словами, имеют линейные *вольтамперные характеристики* (зависимость протекающего через элемент тока от приложенного к нему напряжения выражается "прямой" линией);
- **Нелинейные**, когда параметры одного или нескольких элементов *зависят* от приложенного к ним напряжения и протекающего по ним тока или, другими словами, имеют нелинейные *вольтамперные характеристики* (зависимость протекающего через элемент тока от приложенного к нему напряжения выражается "кривой" линией);
- **Неразветвленные**, когда в нескольких элементах электрической цепи протекает *один и тот же* электрический ток;
- **Разветвленные**, когда в каждом элементе электрической цепи (или группе элементов) протекает электрический ток, *отличающийся* от электрического тока, протекающего по другим элементам электрической цепи;
- **Многофазные**, когда ток в каждом элементе электрической цепи (или

группе элементов) определяется *многофазным источником электрической энергии с несколькими взаимосвязанными ЭДС одинаковой частоты, но отличающимися фазами и амплитудами*;

- ***С сосредоточенными параметрами***, когда элементы электрической цепи  $R, L, C$  имеют явно выраженные габаритные и количественные показатели и выполнены в виде самостоятельных элементов электрической схемы;
- ***С распределенными параметрами***, когда элементы электрической цепи  $R, L, C$  не имеют явно выраженных габаритных и количественных показателей, а равномерно распределены по элементам технических устройств (например, линии электропередач, волноводы и пр.);
- ***Постоянного тока***, когда источник электрической энергии *не изменяет своей полярности*;
- ***Переменного тока***, когда источник электрической энергии *изменяет свою полярность*;
- ***Нестационарные*** электрические цепи, когда изучаются переходные (коммутационные) электрические процессы, которые происходят непосредственно после любого значимого изменения параметров электрической цепи (включение/отключение источника электрической энергии, изменение номиналов электрической цепи и пр.);
- ***Стационарные*** электрические цепи, когда все переходные процессы, связанные с любым значимым изменением параметров электрической цепи завершены (включение/отключение источника электрической энергии, изменение номиналов электрической цепи и пр.).

### 1.3. Узлы, ветви и контуры электрической цепи

- ***Узел электрической цепи*** - это *точка* разветвленной электрической цепи, в которой соединяются не менее трех элементов друг с другом или с источником электрической энергии;
- ***Ветвь электрической цепи*** - это *отрезок* разветвленной электрической цепи, заключенный между двумя ее узлами;
- ***Контур электрической цепи*** - это *участок* разветвленной электрической цепи, по которому может замыкаться электрический ток от источника электрической энергии (замкнутый путь тока по нескольким ветвям).

## 2. Элементы электрических цепей

### 2.1. Резисторы

На схеме приняты следующие обозначения:

$E$  - источник электродвижущей силы (ЭДС);

$r_0$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС;

$r$  - сопротивление проводников и электронных коммутаторов;

$Sw$  - коммутирующий ключ.

#### 2.1.1. Определения

***Резистор*** - это *диссипативный* (рассеивающий электрическую энергию в тепло) элемент электрической цепи, который имеет свойство *оказывать противодействие* протекающему по нему электрическому току  $i_R$  под воздействием приложенного электрического напряжения  $u_R$ .

***Электрическое сопротивление (R)*** - это количественный показатель,

характеризующий свойство резистора оказывать противодействие протеканию электрического тока, который в соответствии с [законом Ома](#) определяется следующим образом:

$$R [\text{Ом}] = u_R [\text{В}] / i_R [\text{А}];$$

Соотношения основных величин:

$$1 \text{ Ом} = 10^{-3} \text{ кОм} = 10^{-6} \text{ МОм} = 10^{-9} \text{ ГОм}$$

### 2.1.2. Основные соотношения при переменном синусоидальном напряжении (см. нижние графики)

**Внешнее напряжение**, которое будет приложено к резистору после включения ключа  $\mathcal{S}w$ :

$$u_R(t) = U_m \sin \omega t$$

где:  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$  - угловая частота изменения напряжения,  $f$  - частота изменения напряжения,  $T$  - период изменения напряжения,  $u_R(t)$  - мгновенное значение напряжения,  $U_m$  - амплитудное значение напряжения.

**Электрический ток** в соответствии с [законом Ома](#) будет иметь вид:

$$i_R(t) = u_R(t) / R = U_m \sin \omega t / R = I_m \sin \omega t,$$

где  $i_R(t)$  - мгновенное значение тока,  $I_m = U_m / R$  - амплитудное значение электрического тока.

**Электрический ток в активном сопротивлении совпадает по фазе с приложенным к нему напряжением.**

**Средние значения** тока и напряжения за полный период равны нулю (поскольку мгновенные значения за положительный и отрицательный полупериоды равны и противоположны по знаку), а за положительный полупериод (по определению):

$$= 0.637 I_m ; \quad U_{cp} = 0.637 U_m$$

Если измерение синусоидальных сигналов тока и напряжения производится дискретными средствами (Аналого-Цифровыми Преобразователями - АЦП), то в соответствии с *методом мгновенных значений*:

;

где  $N$  - число мгновенных замеров на полупериоде (для точного воспроизведения формы сложного сигнала рекомендуется выбирать  $N=50-100$ );  $i_k$ ,  $u_k$  - мгновенные значение тока и напряжения ( $1 < k < N$ ).

**Действующие значения** тока и напряжения (по определению):

$$= 0.707 I_m ; \quad U = 0.707 U_m$$

Если измерение синусоидальных сигналов тока и напряжения производится дискретными средствами (Аналого-Цифровыми Преобразователями - АЦП), то в соответствии с *методом мгновенных значений*:

где  $N$  - число мгновенных замеров на полупериоде (для точного воспроизведения формы сложного сигнала рекомендуется выбирать  $N = 50-100$ );  $i_k$ ,  $u_k$  - мгновенные значение тока и напряжения ( $1 < k < N$ )

**Мощность электрических потерь**, рассеиваемая на резисторе (среднее значение мгновенной мощности  $p(t)$  за полупериод основной частоты источника электрической энергии):

$$p_R(t) [\text{Вт}] = u_R(t) [\text{В}] i_R(t) [\text{А}] = U_m \sin \omega t I_m \sin \omega t = U_m I_m (1 - \cos 2\omega t) / 2$$

где  $U_m I_m / 2 = UI$  - постоянная составляющая активной мощности,  $U_m$ ,  $I_m$  -

максимальные значения напряжения и тока,  $U, I$  - действующие значения напряжения и тока,  $U_m I_m \cos 2\omega t / 2$  - переменная составляющая активной мощности, которая изменяется с *двойной частотой* источника электрической энергии и не создает активных потерь, поскольку среднее значение за период от этой составляющей равно нулю.

Если измерение синусоидальных сигналов тока и напряжения производится *синхронизированными* (в одно и то же мгновение) дискретными средствами (Аналого-Цифровыми Преобразователями - АЦП), то в соответствии с *методом мгновенных значений*:

где  $N$  - число мгновенных замеров на полупериоде (для точного воспроизведения формы сложного сигнала рекомендуется выбирать  $N = 50-100$ );  $i_k, u_k$  - синхронно замеренные мгновенные значения тока и напряжения ( $1 < k < N$ )

### 2.1.3. Основные соотношения при постоянном напряжении (см. верхние графики)

*Внешнее напряжение*, которое будет приложено к резистору после включения ключа  $Sw$ :

$$u(t) = U = \text{const}$$

*Электрический ток* в момент времени  $t_1$  после включения ключа  $Sw$  скачком нарастет до величины:

$$i_R(t) = I_R = U_R / R = \text{const}$$

*Активная мощность* электрических потерь  $P_R$  на резисторе  $R$  от протекающего по нему постоянного тока  $I_R$  выражается следующими зависимостями:

$$P_R = U_R I_R = I_R^2 R = U_R^2 / R = \text{const}$$

При отключении постоянного напряжения в момент времени  $t_2$  ток и мощность скачком изменяются до нуля.

## 2.2. Конденсаторы

На схеме приняты следующие обозначения:

$E$  - источник электродвижущей силы (ЭДС);

$r_0$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС;

$r$  - сопротивление проводников и электронных коммутаторов;

$Sw$  - коммутирующий ключ.

### 2.2.1. Определения

*Конденсатор* - это *реактивный* (запасающий энергию) элемент электрической цепи, который имеет свойство *накапливать, сохранять и отдавать электрический заряд  $Q$* , создаваемый в его *электрическом поле* от протекающего тока  $i_C$  под воздействием приложенного электрического напряжения  $u_C$ .

*Емкость ( $C$ )* - это количественный показатель, характеризующий свойство конденсатора накапливать электрический заряд в электрическом поле:

$$C [\text{Ф}] = Q [\text{К}] / u_C [\text{В}]$$

Соотношения основных величин:

$$1 \text{ Ф} = 10^6 \text{ мкФ} = 10^9 \text{ нФ} = 10^{12} \text{ пФ}$$

**Электрическая энергия**, запасенная в конденсаторе (емкостном накопителе энергии) составляет:

$$W \text{ (Джоуль)} = C u_c^2 / 2$$

### 2.2.2. Основные соотношения при переменном синусоидальном напряжении (см. нижние графики)

**Внешнее напряжение**, которое будет приложено к конденсатору после включения ключа  $SwI$ :

$$u_c(t) = U_m \sin \omega t$$

**Электрический ток** (в соответствии с определением тока) будет иметь вид:

$$i_c(t) = dQ / dt = C du_c(t) / dt = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \cos \omega t,$$

где  $\omega C = 2\pi f C$  - реактивная проводимость конденсатора ( $1 / \omega C = X_c$  - реактивное сопротивление конденсатора). В расчетах принимается, что конденсатор "идеальный", т.е. не имеет активных токов утечки (активной составляющей сопротивления).

**Электрический ток в конденсаторе опережает приложенное к нему напряжение на  $90^\circ$ .**

**Реактивная мощность** конденсатора:

$$q_c(t) = u_c(t) i_c(t) = U_m \sin \omega t I_m \cos \omega t = U_m I_m \sin 2\omega t / 2.$$

Реактивная мощность конденсатора не имеет постоянной составляющей, а только *переменную*, которая изменяется с *двойной частотой* источника электрической энергии. При этом за период основной частоты источника электрической энергии  $T$  емкость дважды запасает электрическую энергию от источника (когда ток и напряжение находятся в одной фазе), а затем дважды отдает ее источнику (когда ток и напряжение находятся в противофазе), т.е. происходит обмен энергией без каких-либо ее потерь (среднее значение мощности за период равно нулю).

### 2.2.3. Основные соотношения при постоянном напряжении (см. верхние графики)

**Внешнее напряжение**, которое будет приложено к конденсатору в момент времени  $t_1$  после включения ключа  $SwI$ :

$$u_c(t) = U = \text{const}$$

Если приложенное к конденсатору внешнее напряжение постоянно и изменения напряжения на конденсаторе не происходит: ( $du_c(t) / dt = 0$ ), то ток в *установившемся режиме* в цепи отсутствует. Он будет существовать только в *переходных режимах* (включения/отключения постоянного напряжения). При этом будут происходить переходные процессы заряда/разряда емкости.

**Ток и напряжение при заряде конденсатора** определяются из уравнения равновесия напряжений в контуре в соответствии со [вторым законом Кирхгофа](#), согласно которому внешнее напряжение  $U$  уравнивается текущим напряжением на заряжающемся конденсаторе  $u_c(t)$  и падением напряжения на активном сопротивлении  $r$  (внутреннем сопротивлении источника электрического напряжения, сопротивлении утечки конденсатора, контактных сопротивлениях цепи):

$$i_c(t)r + u_c(t) = U \text{ или } rC du_c(t) / dt + u_c(t) = U$$

Решением этого дифференциального уравнения относительно  $u_c$  будет *экспонента*:

$$u_c(t) = U(1 - e^{-t/\tau}) \text{ и, соответственно, для тока: } i_c(t) = C du_c(t) / dt = (U/r)e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = rC$  - постоянная времени заряда емкости (при расчетах принимается, что переходные процессы в цепи завершаются через три постоянных времени).

Таким образом, в начальный момент времени при  $t = t_1 = 0$  напряжение на емкости  $u_C(t_0) = 0$ , а затем плавно (по экспоненте) нарастает до максимального установившегося значения  $U_{cm}$ , равного напряжению внешнего источника:  $U_{cm} = U$ .

Ток в начальный момент времени при  $t = t_1 = 0$  скачком нарастает до своего максимального значения  $i_C = I_{cm} = U / r$ , величина которого ограничивается активным сопротивлением  $r$ , а затем плавно (по экспоненте) спадает до нуля.

При размыкании ключа  $Sw1$  накопленный на конденсаторе заряд (и, соответственно, напряжение) может достаточно долго сохраняться в зависимости от качества его диэлектрика, расположенного между пластинами.

Если же в момент времени  $t_2$  замкнуть ключ  $Sw2$ , то образуется другая замкнутая электрическая цепь и начнется переходный процесс разряда конденсатора.

**Ток и напряжение при разряде конденсатора** определяются из уравнения равновесия напряжений в контуре в соответствии со вторым [законом Кирхгофа](#), но в случае, когда внешнее напряжение  $U = 0$ :

$$i_C(t)r + u_C(t) = 0 \text{ или } rduc(t) / dt + u_C(t) = 0$$

Решением этого дифференциального уравнения будут следующие выражения:  $u_C(t) = U_{C0} e^{-t/\tau}$  и, соответственно, для тока:  $i_C(t) = -(U_{C0} / r)e^{-t/\tau}$ , где  $U_{C0}$  - остаточное напряжение на конденсаторе, которое осталось на его пластинах после предыдущего заряда и возможного саморазряда за длительное время (в частности, возможно, что  $U_{C0} = U$ ).

Таким образом, в момент времени  $t_2$  ток разряда конденсатора изменяет свой знак на противоположный (по сравнению с током заряда) и скачком нарастает до максимальной величины  $U_{C0} / r$ , а затем плавно (по экспоненте) спадает до нуля. Напряжение на конденсаторе по экспоненте уменьшается от  $U_{C0}$  до нуля.

### 2.3. Катушки индуктивности

На схеме приняты следующие обозначения:

$E$  - источник электродвижущей силы (ЭДС);

$r_0$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС;

$r$  - сопротивление проводников и электронных коммутаторов;

$Sw$  - коммутирующий ключ.

#### 2.3.1. Определения

**Катушка индуктивности** - это реактивный (запасающий энергию) элемент электрической цепи, который имеет свойство накапливать электрическую энергию  $W$  в магнитном поле электрической катушки и противодействовать любому изменению протекающего по ней тока  $i_L$  под воздействием приложенного внешнего электрического напряжения  $u_L$  за счет наведения в катушке ЭДС самоиндукции  $e_L(t)$ .

**Индуктивность ( $L$ )** - это количественный показатель, характеризующий свойство катушки индуктивности накапливать электрическую энергию в магнитном поле:

$$L [\text{Гн}] = w^2 \mu S / l$$

где  $w$  - число витков катушки,  $S$ ,  $l$  - размеры катушки,  $\mu$  - магнитная проницаемость среды.

Основные соотношения:

$$1 \text{ Гн} = 10^3 \text{ мГн} = 10^6 \text{ мкГн}$$

**Электрическая энергия**, запасенная в катушке индуктивности (индуктивном накопителе энергии), составляет:

$$W[\text{Дж}] = Li^2 / 2$$

**ЭДС самоиндукции**  $e_L(t)$  - это электродвижущая сила, возникающая в катушке при любом изменении протекающего по ней тока в соответствии с **законом электромагнитной индукции** (**закон Ленца**), которая уравнивает приложенное к катушке внешнее напряжение  $u_L(t)$ :

$$u_L(t) = -e_L(t) = L di_L(t) / dt$$

### 2.3.2. Основные соотношения при переменном синусоидальном напряжении (см. нижние графики)

**Внешнее напряжение**, которое будет приложено к катушке индуктивности после включения ключа  $SwI$ :

$$u_L(t) = U_m \sin \omega t = L di_L(t) / dt$$

**Электрический ток**, протекающий по катушке индуктивности, может быть определен после разделения переменных и интегрирования этого уравнения:

$$i_L(t) = - (U_m / \omega L) \cos \omega t = - I_m \cos \omega t,$$

где  $\omega L = 2\pi fL = X_L$  - индуктивное сопротивление катушки индуктивности. В расчетах принимается, что катушка индуктивности "идеальная", т.е. не имеет активной составляющей сопротивления.

**Электрический ток отстает по фазе относительно приложенного к катушке индуктивности напряжения на 90°**

**Реактивная мощность** катушки индуктивности:

$$q_L(t) = u_L(t) i_L(t) = -U_m \sin \omega t I_m \cos \omega t = U_m I_m \sin 2\omega t / 2$$

Реактивная мощность катушки индуктивности не имеет постоянной составляющей, а только *переменную*, которая изменяется с *двойной частотой* источника электрической энергии. При этом за период основной частоты источника электрической энергии катушка индуктивности дважды запасает электрическую энергию от источника (когда ток и напряжение находятся в одной фазе), а затем дважды отдает ее источнику (когда ток и напряжение находятся в противофазе), т.е. происходит обмен энергией без каких-либо потерь.

### 2.3.3. Основные соотношения при постоянном напряжении (см. верхние графики)

**Внешнее напряжение**, которое будет приложено к катушке индуктивности в момент времени  $t_1$  после включения ключа  $Sw1$ :  $u(t) = U = \text{const}$ .

В момент времени  $t_1$ , после включения ключа  $Sw1$  образуется замкнутая электрическая цепь (см. схему), в которой в соответствии со **вторым законом Кирхгофа** внешнее напряжение  $U$  уравнивается противо-ЭДС самоиндукции  $e_L(t)$  и падением напряжения на активном сопротивлении  $r$  (внутреннем сопротивлении источника электрического напряжения, сопротивлении катушки индуктивности, контактных сопротивлениях цепи):

$$i_L(t)r + e_L(t) = U \text{ или } i_L(t)r + L di_L(t) / dt = U$$

**Ток в цепи и ЭДС самоиндукции** определяются из решения этого

дифференциального уравнения относительно  $i_L(t)$  в виде экспонент:

$$i_L(t) = (U/r) (1 - e^{-t/\tau}) \text{ и, соответственно, для ЭДС: } e_L(t) = -U e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/r$  - электромагнитная постоянная времени цепи (при расчетах принимается, что переходные процессы в цепи завершаются через три постоянных времени).

Таким образом, в начальный момент времени при  $t = t_1 = 0$  ток в цепи  $i_L(t_0) = 0$ , а затем *плавно* (по экспоненте) нарастает до максимального установившегося значения  $I_{Lm}$ , которое ограничивается только величиной активного сопротивления  $I_{Lm} = U/r$  (внутренним сопротивлением источника напряжения, собственным активным сопротивлением катушки индуктивности, контактными сопротивлениями цепи).

При этом в катушке индуктивности запасется электрическая энергия  $W_L = L I_{Lm}^2 / 2$ . Если в момент времени  $t_2$  разорвать электрическую цепь ключом  $Sw1$ , то запасенная в индуктивности электрическая энергия, стремясь разрядиться, создаст вероятность *перенапряжения* на обмотке катушки индуктивности с возможностью пробоя ее электрической изоляции. Для исключения этого нежелательного явления рекомендуется катушки индуктивности (например, обмотки возбуждения реле, контакторов и пр.) шунтировать диодами, включенными параллельно обмотке таким образом, что бы при разрыве цепи возникающая ЭДС самоиндукции разряжалась через шунтирующий диод, что эквивалентно включению ключа  $Sw2$ .

ЭДС самоиндукции  $e_L(t_0)$  в начальный момент времени при  $t = t_1 = 0$  скачком нарастает до своего максимального значения, находясь в противофазе с внешним приложенным к катушке напряжением и уравновешивая его  $e_L(t_0) = E_{Lm} = -U$ , а затем *плавно* (по экспоненте) спадает до нуля.

#### 2.4. Источники тока и ЭДС

**Источник тока** - это один из типов источников электрической энергии, у которого *внутреннее сопротивление настолько велико* ( $r_0 \rightarrow \infty$ ), что изменения сопротивления нагрузки ( $R_n$ ) не оказывают влияния на изменение общего сопротивления электрической цепи и, следовательно, тока в электрической цепи (ток в нагрузке остается стабильным при изменении сопротивления нагрузки).

**Источник ЭДС** - это один из типов источников электрической энергии, у которого *внутреннее сопротивление настолько мало* ( $r_0 \rightarrow 0$ ), что при изменении сопротивления нагрузки ( $R_n$ ) и, соответственно тока, не происходит падения напряжения внутри источника (напряжение на нагрузке остается стабильным при изменении тока нагрузки).

### 3. Последовательное соединение элементов\*

\*На электрической схеме представлен один из возможных примеров реализации последовательной электрической цепи с различными типами элементов. Возможна любая иная комбинация элементов. На схеме приняты следующие обозначения:  $E$  - источник электродвижущей силы (ЭДС);  $r_0$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС;  $r$  - сопротивление проводников и электрических коммутаторов;  $Sw$  - коммутирующий ключ.



### 3.1. Ток в последовательной электрической цепи

При последовательном соединении элементов цепи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  с источником ЭДС и замыкании ключа  $\mathcal{S}w$  в электрической цепи будет протекать *общий ток  $i$* , который создаст на каждом элементе цепи соответствующее *падение напряжения  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$* .

Если в качестве источника электрической энергии будет использован источник синусоидального напряжения, то после завершения переходного процесса, связанного с коммутацией электрической цепи ключом  $\mathcal{S}w$  (через несколько периодов основной частоты), установившееся значение *общего электрического тока* в цепи будет иметь следующее значение:

$$i(t) = I_m \sin \omega t$$

### 3.2. Напряжения в последовательной электрической цепи (см. пояснения в разделе 2)

Падение напряжения на активном сопротивлении *совпадает по фазе* с током и составляет:

$$u_R(t) = i(t) R = I_m R \sin \omega t = U_m \sin \omega t$$

Падение напряжения на катушке индуктивности *опережает ток по фазе на  $90^\circ$*  и составляет:

$$u_L(t) = I_m \omega L \cos \omega t = U_m \cos \omega t$$

Падение напряжения на конденсаторе *отстает от тока по фазе на  $90^\circ$*  и составляет:

$$u_C(t) = - (I_m / \omega C) \cos \omega t = -U_m \cos \omega t$$

Общее напряжение источника электрической энергии в каждый момент времени равно *векторной сумме* (с учетом фазовых сдвигов) мгновенных значений всех составляющих падения напряжений на элементах последовательной электрической цепи (см. на схеме - треугольник напряжений):

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = I_m R \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t - (I_m / \omega C) \cos \omega t$$

### 3.3. Сопротивление последовательной электрической цепи

*Полное сопротивление* контура последовательной электрической цепи получим, если общее напряжение источника электрической энергии  $u(t) = I_m R \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t - (I_m / \omega C) \cos \omega t$  разделим на общий ток последовательной электрической цепи  $i(t) = I_m \sin \omega t$ .

С учетом фазовых сдвигов тока и напряжений на элементах последовательной электрической цепи полное сопротивление имеет следующее численное значение (см. на схеме - треугольник сопротивлений):

*Фазовый угол сдвига* между приложенным напряжением  $u(t)$  и общим током в цепи  $i(t)$ :

$$\varphi = \arctg [(X_L - X_C) / R]$$

*Степень реактивности электрической цепи* определяется соотношением активных и реактивных составляющих полного электрического сопротивления: Если  $X_L > X_C$ , то электрическая цепь будет *индуктивного типа*, т.е. общий электрический ток в цепи будет отставать от внешнего приложенного напряжения на угол  $0 < \varphi < 90^\circ$ .

Если  $X_L < X_C$ , то электрическая цепь будет *емкостного типа*, т.е. общий электрический ток в цепи будет опережать напряжение на угол  $-90^\circ < \varphi < 0$ . В частном случае, когда  $X_L = X_C$ , или  $X_L = X_C = 0$ , электрическая цепь будет

*активного типа*, т.е. общий электрический ток в цепи будет синфазен с напряжением ( $\varphi = 0$ ).

Если все три базовых элемента последовательной электрической цепи - постоянные резисторы, то полное сопротивление контура равно *сумме сопротивлений* входящих элементов:

$$Z = R_1 + R_2 + R_3$$

### 3.4. Мощность электрических потерь в элементах электрической цепи

*Мгновенное значение мощности* в любом элементе электрической цепи:

$$p(t) = u(t) i(t)$$

*Среднее значение мощности* электрической цепи (по определению):

(Интеграл на периоде  $T$  от  $\cos(2\omega t - \varphi)$  равен нулю, т.к. функция дважды меняет свой знак).

где  $T$  - период основной частоты;  $u(t)$ ,  $i(t)$  - мгновенные значения напряжения и тока;  $U_m$ ,  $I_m$  - амплитудные значения напряжения и тока;  $U$ ,  $I$  - действующие значения напряжения и тока;  $\varphi$  - фазовый угол сдвига между током и напряжением;  $\cos\varphi$  - коэффициент мощности электрической цепи.

*Среднее значение мощности на индуктивности и емкости* равно нулю, поскольку падение напряжения на них  $u_C(t)$  и  $u_L(t)$  сдвинуто по отношению к протекающему по ним току  $i(t)$  на  $\varphi = 90^\circ$  ( $\cos\varphi = 0$ ) и произведение их мгновенных значений (мгновенное значение мощности) на периоде основной частоты дважды изменяют свой знак (см. графики).

*Среднее значение мощности на активном сопротивлении* не изменяет своего знака ( $\varphi = 0$ ,  $\cos\varphi = 1$ ) и составляет:

$$P_{cp} = UI$$

где  $U$ ,  $I$  - действующие значения напряжения и тока.

### 3.5. Резонанс напряжений в последовательной электрической цепи

*Условие резонанса*: если в последовательной электрической цепи обеспечить условие равенства реактивных сопротивлений  $X_L = X_C$  или  $\omega L = 1/\omega C$  за счет изменения  $L$ ,  $C$  или  $\omega$ , то при частоте источника электрической энергии в последовательной электрической цепи возникает явление *резонанса напряжений*, суть которого заключается в следующем.

*Резонансная кривая*. При приближении к точке резонанса электрический ток, потребляемый из сети, резко возрастает (см. на схеме - резонансную кривую  $I$  от  $\omega$ ), поскольку в каждый момент времени мгновенное значение напряжения на конденсаторе  $u_C(t)$  будет по своей величине равно мгновенному значению напряжения на катушке индуктивности  $u_L(t)$ , но противоположно ему по знаку (см. графики), то они будут компенсировать друг друга и общий ток от источника питания будет определяться только сопротивлением  $R$ .

*Острота резонанса* определяется *добротностью контура* (при отсутствии внешнего сопротивления  $R$  значение  $r$  определяется величиной активного сопротивления катушки индуктивности, величиной активного сопротивления току утечки конденсатора, а также контактными сопротивлениями в контуре). Чем меньше активное сопротивление контура, тем больше острота резонанса и величина тока в контуре. Явление резонанса широко используется в радиотехнике.

#### 4. Параллельное соединение элементов\*

\*На электрической схеме представлен один из возможных примеров реализации параллельной электрической цепи с различными типами элементов. Возможна любая иная комбинация элементов. На схеме приняты следующие обозначения:  $E$  - источник электродвижущей силы (ЭДС);  $r_0$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС;  $r$  - сопротивление проводников и электронных коммутаторов;  $S_w$  - коммутирующий ключ.

##### 4.1. Токи в ветвях параллельной электрической цепи

При параллельном соединении элементов цепи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  с источником ЭДС и замыкании ключа  $S_w$  между узлами  $a$ ,  $b$  (точки  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_1$ ,  $b_2$  узлами цепи не являются и их потенциалы соответственно равны потенциалам узловых точек  $a$ ,  $b$ ) образуется несколько *параллельных ветвей* (в данном случае три ветви), причем в каждой ветви протекает свой ток. Напряжение источника электрической энергии  $u(t) = u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$  является *общим* для всех элементов электрической цепи.

Если в качестве источника электрической энергии будет использован источник синусоидальной ЭДС  $u(t) = U_m \sin \omega t$ , то после завершения переходного процесса, связанного с коммутацией электрической цепи ключом  $S_w$  (через несколько периодов основной частоты), установившиеся значения электрического тока в каждой ветви будут иметь следующие значения (см. пояснения в разделе 2):

$$i_R(t) = U_m \sin \omega t / R = I_m \sin \omega t,$$

т.е. ток в ветви активного сопротивления *совпадает по фазе* с приложенным напряжением;

$$i_C(t) = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \cos \omega t,$$

т.е. ток в ветви с конденсатором *опережает на 90°* приложенное к нему напряжение;

$$i_L(t) = - (U_m / \omega L) \cos \omega t = - I_m \cos \omega t,$$

т.е. ток в ветви с катушкой индуктивности *отстает на 90°* от приложенного к нему напряжения.

**Суммарный ток**, потребляемый от источника электрической энергии, в соответствии с [первым законом Кирхгофа](#) равен *векторной сумме* (с учетом фазовых сдвигов) всех токов, протекающих по ветвям параллельной цепи (см. на схеме треугольник токов):

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = U_m \sin \omega t / R + \omega C U_m \cos \omega t - (U_m / \omega L) \cos \omega t$$

##### 4.2. Полная проводимость параллельно соединенных базовых элементов

Если суммарный ток  $i(t) = U_m \sin \omega t / R + \omega C U_m \cos \omega t - (U_m / \omega L) \cos \omega t$ , потребляемый от источника, разделить на общее напряжение источника электрической энергии  $u(t) = U_m \sin \omega t$ , то *полная проводимость* параллельного

соединения элементов будет равна сумме проводимостей составляющих элементов.

С учетом фазовых сдвигов токов и напряжений полная проводимость имеет следующее численное значение (см. на схеме треугольник проводимостей):

где  $G = 1/Z$  - полная проводимость цепи;  $g_R = 1/R$  - проводимость ветви с активным сопротивлением;  $g_L = 1/\omega L$  - проводимость ветви с катушкой индуктивности;  $g_C = \omega C$  - проводимость ветви с конденсатором.

**Фазовый угол сдвига** между приложенным напряжением  $u(t)$  и общим током в цепи  $i(t)$ :

$$\varphi = \arctg [(g_L - g_C) / g_R]$$

Если все три элемента параллельной электрической цепи - постоянные резисторы, то:

$$1/Z = 1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = (R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2) / (R_1R_2R_3)$$

#### 4.3. Мощность электрических потерь в элементах электрической цепи

Поскольку на катушке индуктивности и конденсаторе падение напряжения сдвинуто по отношению к протекающему по ним току на  $90^\circ$ , то произведение их мгновенных значений (**мгновенное значение мощности**)  $q_C = i_C(t) u_C$  и  $q_L = i_L(t) u_L$  на периоде основной частоты дважды изменяют свой знак и среднее за период значение мощности равно нулю (см. графики).

На активном сопротивлении ток по фазе совпадает с падением напряжения, поэтому их произведение (**мгновенное значение мощности**) на периоде основной частоты не изменяет своего знака, что создает среднее значение мощности электрических потерь:

$$P_{cp} = u_R(t) i_R(t) = UI$$

где  $U, I$  - действующие значения напряжения и тока.

#### 4.4. Резонанс токов в параллельной электрической цепи

**Условие резонанса:** если в параллельной электрической цепи обеспечить условие равенства реактивных проводимостей  $g_L = g_C$  ( $1/\omega L = \omega C$ ) за счет изменения  $L, C$  или  $\omega$ , то при частоте источника электрической энергии в параллельной электрической цепи возникает явление **резонанса токов**, суть которого заключается в следующем.

При приближении к точке резонанса суммарный ток, потребляемый из сети, резко падает (см. на схеме - зависимость тока  $I$  от частоты  $\omega$ ), а энергия, потребляемая из сети, идет только на покрытие потерь в активных элементах цепи. В то же время в реактивных ветвях цепи будут протекать токи значительно большей величины - происходит обмен реактивной энергией между катушкой индуктивности и конденсатором. В каждый момент времени мгновенное значение тока, протекающего через емкость  $i_C$  будет равно мгновенному значению тока, протекающему через катушку индуктивности  $i_L$ , но противоположно ему по знаку (см. графики). Поэтому в каждый момент времени они будут компенсировать друг друга и общий ток от источника питания будет определяться только сопротивлением  $R$  активной ветви.

**Острота резонанса** определяется **добротностью контура** (где  $r$  - активная составляющая сопротивления катушки индуктивности и активная составляющая сопротивления конденсатора, эквивалентная току утечки, а также контактные сопротивления в контуре). Чем меньше это сопротивление, тем больше острота резонанса и величина тока в контуре.

Явление резонанса токов используется в радиотехнике, а также в селективных фильтрах.

## 5. Смешанное (последовательно-параллельное) соединение элементов\*

\*На электрической схеме (верхняя часть схемы) представлен один из возможных примеров реализации смешанной электрической цепи с различными типами элементов. Возможна любая иная комбинация элементов.

### 5.1. Полное сопротивление электрической цепи

*Полное сопротивление электрической цепи* при смешанном соединении ее элементов складывается из предварительно найденного *эквивалентного* сопротивления элементов параллельного соединения (в данном случае  $X_C = 1/\omega C \parallel R$ ) и последовательного подключения к ним (в данном случае) сопротивления  $X_L = \omega L$ :

$$Z = \omega L + (R/\omega C)/(R + 1/\omega C)$$

С учетом фазовых сдвигов токов и напряжений эквивалентная проводимость параллельного контура имеет следующее численное значение (см. [4.2](#)):

$$\text{или } Z_{RC} = 1/G_{RC}$$

Полное сопротивление электрической цепи при смешанном соединении ее элементов в представленном на рисунке варианте имеет следующее численное значение:

### 5.2. Токи и напряжения в элементах электрической цепи (векторная диаграмма)

Зададимся вектором напряжения  $u_{ab}$ , которое является общим напряжением для параллельного соединения элементов  $R$  и  $C$  (см. *векторную диаграмму*).

Ток в активной ветви  $i_R = u_{ab} / R$  будет совпадать с направлением напряжения  $u_{ab}$ , а ток в ветви с конденсатором  $i_C = u_{ab} / X_C$  опережает его на  $90^\circ$ . Векторная сумма токов  $i_R$  и  $i_C$  образует результирующий ток, потребляемый от источника и протекающий через катушку индуктивности  $L$ .

Падение напряжения на катушке индуктивности  $u_L = iX_L$  будет опережать протекающий по ней ток на  $90^\circ$ . Векторная сумма напряжений  $u_{ab}$  и  $u_L$  образует общее напряжение  $u$ .

Фазовый угол сдвига  $\phi$  между результирующими значениями тока  $i$  и напряжения  $u$  зависит от конфигурации смешанной электрической цепи и соотношения ее параметров. В данном примере результирующий ток опережает напряжение, т.е. в целом электрическая цепь имеет *активно-емкостной* характер.

### 5.3. Делитель напряжения

Часто при проектировании различных устройств требуется уменьшить величину напряжения или какого-то сигнала произвольной величины в несколько раз. Наиболее простой путь - использование *делителя напряжения*.

К источнику ЭДС с выходным уровнем  $u$  подключаются два последовательно соединенных резистора  $R_1$  и  $R_2$  (см. нижнюю часть схемы). При включении ключа  $S_w$  в замкнутом контуре начинает протекать ток  $i = u / (R_1 + R_2)$ . В соответствии с [законом Ома](#) на каждом из резисторов создается падение напряжения, пропорциональное его величине:

$$u(R_2) = iR_2 = uR_2 / (R_1 + R_2)$$

Отношение сопротивлений  $k = R_2 / (R_1 + R_2)$  называется *коэффициентом деления* и показывает, какая часть общего напряжения будет приложена к нагрузке  $R_3$ , подключенной параллельно резистору  $R_2$ . Сопротивление нагрузки  $R_3$  должно быть на один-два порядка выше сопротивления резистора  $R_2$  для того, чтобы можно было пренебречь шунтирующим влиянием тока  $i(R_3)$  на коэффициент деления. Если это сделать нельзя, то коэффициент деления следует рассчитывать с учетом сопротивления нагрузки (см. [раздел 5.1](#)):

$$k = R_2 / [R_1 + R_2R_3 / (R_2 + R_3)]$$

Для более точного задания (подстройки) требуемого уровня выходного напряжения резистор  $R_2$  делают переменным.

Принципиально делитель напряжения можно построить на любых базовых элементах электрической цепи, но только резистивный делитель выполняет свою функцию на постоянном и переменном токе.

### 5.4. Пассивный L-C фильтр

Электрическая схема последовательно-параллельного соединения элементов (см. верхнюю часть) часто используется как пассивный **L-C** фильтр для сглаживания пульсаций высоких гармоник источника электрической энергии при нежелательном их проникновении в нагрузку  $R$  (например, после выпрямления переменного напряжения).

С ростом частоты гармоник источника электрической энергии  $\omega_k$  увеличивается значение индуктивного сопротивления  $X_L = \omega_k L$  и уменьшается значение емкостного сопротивления  $X_C = 1/\omega_k C$ . В результате для высоких гармоник цепочка **L-C** образует делитель напряжения (см. [раздел 5.3](#)) с высоким значением коэффициента деления и на нагрузку передается значительно ослабленная амплитуда гармоник.

## 7. Многофазные электрические цепи

### 7.1. Общие вопросы многофазных электрических цепей

*Многофазные электрические цепи* предполагают наличие *многофазного источника электрической энергии*, у которого ЭДС отдельных фаз в общем случае имеют *различные амплитуды, произвольные фазовые сдвиги*, но *одну и ту же частоту*.

*Экономическая целесообразность* применения многофазных энергетических систем определяется более высокой эффективностью преобразования электрической энергии (например, в мощных промышленных выпрямительных

установках), а также наиболее простым получением вращающихся магнитных полей, что важно для промышленных электроприводов переменного тока. На практике чаще всего применяют *трехфазные* симметричные системы, хотя в отдельных случаях число фаз может быть иным.

**Промышленные электрические сети** имеют жестко регламентированные параметры:

- число фаз  $m = 3$ ;
- частота промышленной сети  $f = 50$  Гц  $\pm 1\%$ ;
- сдвиг фаз  $\varphi = 120^\circ$  (электрических градусов);
- фазное напряжение  $U_\phi = 220$  В  $\pm 10\%$ ;
- линейное (межфазное) напряжение  $U_\Delta = 380$  В  $\pm 10\%$ .

## 7.2. Соединение источников и потребителей электрической энергии

Существуют *четыре* схемы соединения источников и потребителей электрической энергии в трехфазных цепях:

- **"Звезда" - "Звезда"** (см. верхнюю схему). Для удобства назовем один вывод источника и нагрузки "начало", а другой "конец". В этом случае все три источника ЭДС ( $E_A, E_B, E_C$ ) соединены своими "концами" друг с другом (нулевая точка генератора -  $0$ ), три потребителя ( $Z_A, Z_B, Z_C$ ) также соединены своими "концами" друг с другом (нулевая точка нагрузки -  $0'$ ), а "начала" источников ЭДС ( $A, B, C$ ) соединены с "началами" потребителей ( $A', B', C'$ ). Общая точка объединенных "концов" источников ЭДС ( $0$ ) соединяется с общей точкой объединенных "концов" потребителей ( $0'$ ) *нулевым проводом*, по которому протекает уравнивающий ток  $i_0$ , если трехфазная система несимметрична. В идеально симметричной системе ток в нулевом проводе отсутствует и принципиально этот провод можно убрать. Как следует из треугольника напряжений и токов (см. векторную диаграмму на схеме):

$$u_{\Delta AB} = 2 u_{\phi A} \cos 30^\circ = \sqrt{3} u_{\phi A}; \quad i_{\Delta A} = i_{\phi A}$$

- **"Треугольник" - "Треугольник"** (см. нижнюю схему). В этом случае "начало" источника  $E_A$  соединяется с "концом" источника  $E_B$ , "начало" источника  $E_B$  соединяется с "концом" источника  $E_C$ , "начало" источника  $E_C$  соединяется с "концом" источника  $E_A$ . Аналогичным образом соединяются потребители электрической энергии. При этом:  $u_{\Delta AB} = u_{\phi A}$ ;  $i_{\Delta A} = i_{\phi AB} - i_{\phi CA}$  (с учетом фазовых сдвигов).
- **"Звезда" - "Треугольник"**. В этом случае источники электрической энергии соединяются по схеме "Звезда", а потребители - по схеме "Треугольник".
- **"Треугольник" - "Звезда"**. В этом случае источники электрической энергии соединяются по схеме "Треугольник", а потребители - по схеме "Звезда".

## 7.3. Энергетические показатели

**В общем случае несимметричной** трехфазной сети все параметры отдельных фаз могут существенно отличаться, поэтому общая мощность определяется, как сумма мощностей отдельных фаз.

Активная мощность -  $P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C$

Реактивная мощность -  $Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C$

Полная мощность -

**В частном случае симметричной** трехфазной сети все параметры отдельных фаз равны, поэтому:

$$P = 3UI\cos\varphi, Q = 3UI\sin\varphi, S = 3UI$$

где  $U, I$  - действующие значения фазных напряжений и токов соответствующих фаз.

#### 7.4. Вращающееся электромагнитное поле в трехфазной системе

Если на катушку индуктивности с числом витков  $w$  подать переменное синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , в ней возникает электрический ток, который создает в катушке переменный *магнитный поток*  $\Phi$ , направленный по ее оси. Вектор *магнитной индукции*  $B = \Phi / S$  (где  $S$  - сечение катушки) будет изменяться во времени по синусоидальному закону и принимать крайние значения в диапазоне от  $-B_m$  до  $B_m$ , т.е. каждая катушка в отдельности создает только *пульсирующее магнитное поле*.

Для того, чтобы магнитное поле стало *вращаться*, необходимо:

- взять *несколько катушек* (минимум две),
- расположить их по окружности друг относительно друга с некоторым *пространственным (геометрическим) смещением*,
- подать на каждую катушку электропитание от многофазного источника переменного напряжения с одной и той же частотой, но с некоторым *временным сдвигом* фаз для каждой катушки,
- создать среду, объединяющую магнитные потоки отдельных катушек (*общий магнитопровод*).

Катушки подключены к трехфазному источнику электропитания с *независимым регулированием* амплитуд ( $U$ ), фаз ( $\psi$ ) и общей частоты ( $\omega = 2\pi f$ ):

$$u_A = U_A \sin(\omega t + \psi_A)$$

$$u_B = U_B \sin(\omega t + \psi_B)$$

$$u_C = U_C \sin(\omega t + \psi_C)$$

Для получения *кругового вращающегося магнитного поля* (результатирующий вектор  $B$  не изменяется по величине в процессе вращения) необходимо на все катушки подать *одинаковые* амплитудные значения напряжений и задать *одинаковые* временные фазовые сдвиги конкретной величины  $\psi = 120^\circ$  (электрических градусов).

Частота вращения результирующего вектора  $B$  определяется частотой напряжения питания  $\omega = 2\pi f$ .

Если подавать на катушки напряжения, имеющие различные амплитудные значения и/или углы относительного смещения, отличные от  $120^\circ$ , то вместо кругового будет сформировано *эллиптическое вращающееся магнитное поле*, у которого амплитуда результирующего вектора  $B$  будет изменяться в зависимости от углового положения. Такой режим для электрической машины является нежелательным, поскольку создает повышенные электромагнитные вибрации и нестабильность вращающего момента.

Если углы относительного смещения фазных напряжений во времени  $\psi$  задать нулевыми, будет получено *пульсирующее* магнитное поле.

Изменить направление вращения магнитного поля можно, изменяя знаки фазовых углов  $\psi$ , что эквивалентно переключению фаз электрической машины.